Estadística 2019

Examen de entrenamiento 2 - Segundo parcial

Test (20 %)

$\boxed{1}$ Sea X una variable aleatoria. Se toma una muestra aleatoria simple. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) $(x_1, \ldots, x_n)$ y $(X_1, \ldots, X_n)$ son equivalentes;

b) $(x_1, \ldots, x_n)$ es una variable aleatoria antes de la observación y un conjunto de números después de la observación;

c) $(X_1, \ldots, X_n)$ es una variable aleatoria antes de la observación y un conjunto de números después de la observación.

$\boxed{2}$ Se tiene un experimento de Poisson con una variable aleatoria $X \rightsquigarrow P(\lambda)$ que mide el número de sucesos por unidad de tiempo. Se considera la variable aleatoria T tiempo entre m sucesos consecutivos, con $m > 1$. Entonces es cierto que:

a) En el intervalo $(0, t)$ no puede ocurrir ningún suceso y la probabilidad de esto es $e^{-\lambda t}$.

b) En el intervalo $(0, t)$ pueden ocurrir hasta $m - 1$ sucesos y la probabilidad de esto es $\sum_{i=0}^{m-1} \dfrac{(\lambda t)^i e^{-\lambda t}}{i!}$;

c) En el intervalo $(0, t)$ pueden ocurrir $m - 1$ sucesos con probabilidad $\displaystyle\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\lambda}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)^2}$.

$\boxed{3}$ Sea X una variable aleatoria $X \rightsquigarrow \exp(\beta))$. Entonces $P(X \leq 7 \mid X \geq 2)$ es igual a:

a) $P(X \leq 7)$;

b) $P(X \leq 5)$;

c) $P(X \leq 1 \mid X \geq 2/7)$.

$\boxed{4}$ Sea $X \rightsquigarrow B(5, p)$, con $0 < p < 1$. Sea una muestra aleatoria simple (X_1, X_2) de X. Se toma $\widehat{p} = 3X_1 - 2X_2$ como estimador de p. El ECM de $\widehat{p}$ vale:

a) $16p^2 + 65p(1 - p)$;

b) $4p^2 + 25p(1 - p)$;

c) $5p(1 - p)$.

---

5 Sea $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, 3)$. Si $P(X > 6) = 0.33$, entonces μ:

a) Vale 4.68

b) 5.56;

c) No se puede calcular con estos datos.

Teoría (25 %)

Apartado 1 (15 %)

Sea X una variable aleatoria con distribución de Pareto Par(α, k). Además, sean x_1, x_2, a números reales con $a > 0, x_1 > x_2$ y $x_2/a > k$. Probad la siguiente fórmula y relacionarla con el teorema anterior.

$$P(X > ax_1 \,|\, X > ax_2) = P(X > x_1/a \,|\, X > x_2/a)$$

Apartado 2 (10 %)

Calcular el estimador de máxima verosimilitud para la desviación típica de una población normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Problema 2 (30 %)

En un sistema operativo, la duración de cada proceso de cierto tipo sigue una distribución de Pareto. Se sabe que la duración mínima de un proceso es 2 s, mientras que su duración esperada es 3 s.

(a) (2 *puntos*) Comprobar que la probabilidad de que un proceso dure más de 3 s vale 8/27. Para cálculos posteriores, redondear este valor a un decimal.

(b) (2 *puntos*) Se ejecutan 6 procesos independientes. Calcular la probabilidad de que al menos 3 de ellos duren más de 3 s cada uno.

(c) (2 *puntos*) Se ejecutan procesos independientes sucesivamente. Obtener la probabilidad de que se ejecuten más de 2 antes del primero que dura más de 3 s.

(d) (2 *puntos*) Cada minuto se ejecuta una media de 4 procesos independientes. Este promedio permanece constante en el tiempo. Determinar la probabilidad de que en 2 minutos se ejecuten más de 5 y menos de 10 procesos.

(e) (2 *puntos*) Se ejecutan 192 procesos independientes. Calcular la probabilidad de que su duración total sea menor que 558 s.

Problema 3 (25 %)

Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 1-\theta & -1/2 \le x \le 0 \\ 1+\theta & 0 < x \le 1/2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El parámetro θ es desconocido, pero $-1 < \theta < 1$. Se sabe que la media y la varianza de X valen $\theta/4$ y $1/12 - \theta^2/16$, respectivamente. Sea $[X_1, \ldots, X_n]$ una muestra de X.

(a) (5 *puntos*) Hallar el estimador de θ por el método de los momentos y llamarlo $\widehat{\theta}_1$. Determinar si $\widehat{\theta}_1$ es centrado y alcular su error cuadrático medio.

(b) (5 *puntos*) Para $n = 3$, se considera $\widehat{\theta}_3 = 2\,X_1 + 3\,X_2 - X_3$ como estimador de θ. Determinar si $\widehat{\theta}_3$ es centrado y calcular su error cuadrático medio. Entre $\widehat{\theta}_1$ y $\widehat{\theta}_3$, ¿cuál es mejor estimador de θ?