Problemas solucionados de probabilidad

Paco Gómez

Febrero de 2019

Teorema 0.1 (Teorema 2.4.13) *Sea (E, Ω, P) un espacio de probabilidad.*

(1) Si A, B son dos sucesos cualesquiera y $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$.

(2) La probabilidad es un número entre 0 y 1.

(3) Para todo $A \in \Omega$, se tiene que $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

(4) Si A, B son dos sucesos cualesquiera, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Prueba:

(1) Si $A \subseteq B$, entonces se puede escribir B como $B = A \cup (B - A)$. Los conjuntos A y $B - A$ son disjuntos por su propia definición. Entonces se puede aplicar el axioma 3:

$$P(B) = P(A) + P(B - A)$$

Por el axioma 1 aplicado al suceso $B - A$, se tiene que $P(B - A) \geq 0$. De aquí se sigue que $P(B) \geq P(A)$.

(2) Si A es un suceso, entonces es un subconjunto de E y en consecuencia $A \subseteq E$. Por la propiedad anterior $P(A) \leq P(E)$. Por el axioma 2, $P(E) = 1$, y por el axioma 1 aplicado a A, $P(A) \geq 0$. Combinando todo obtenemos que $0 \leq P(A) \leq 1$.

(3) Dado cualquier suceso $A \subseteq E$, E se puede escribir como $E = A \cup \overline{A}$, donde obviamente A y $\overline{A}$ son disjuntos. Por el axioma 3, $P(E) = P(A) + P(\overline{A})$. Usando el axioma 2, concluimos que $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

(4) Sean A, B son dos sucesos cualesquiera. La unión $A \cup B$ se puede escribir como sigue:

$$A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$$

Los conjuntos de la izquierda son disjuntos entre sí por su propia definición. Aplicando el axioma 3, tenemos:

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(B - A) + P(A \cap B)$$

Por otro lado, el suceso A se puede descomponer como la unión disjunta de $A-B$ y $A\cap B$. De nuevo, por el axioma 3, $P(A) = P(A-B)+P(A\cap B)$. Por tanto, $P(A-B) = P(A)-P(A\cap B)$. Un argumento análogo prueba que $P(B-A) = P(B) - P(A\cap B)$. Finalmente, tenemos:

$$\begin{aligned}P(A\cup B) =& P(A-B) + P(B-A) + P(A\cap B)\\ =& P(A) - P(A\cap B) + P(B) - P(A\cap B) + P(A\cap B)\\ & P(A) + P(B) - P(A\cap B)\end{aligned}$$

como queríamos probar.

Teorema 0.2 Teorema de la probabilidad total. *Sea E un espacio muestral. Supongamos que existen un conjunto de sucesos $H_1,\ H_2,\ldots,H_n$ tales que:*

- *La unión de los sucesos $H_i, i = 1,\ldots,n$ es el espacio muestral;*
- *Los sucesos de H_i, H_j son disjuntos dos a dos*
- *Se cumple que $P(H_i) > 0$.*

Entonces se tiene que, para cualquier suceso A:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)$$

Prueba: La prueba se basa en el axioma 3 de los espacios de probabilidad. Los conjuntos $A\cap H_i$, para $i = 1,\ldots,n$ son disjuntos dos a dos. En efecto, si $i \neq j$, entonces:

$$(A\cap H_i)\cap(A\cap H_j) = A\cap(H_i\cap H_j) = A\cap\emptyset = \emptyset$$

Por otro lado, dado que $P(H_i) > 0$ para todo i, las probabilidades condicionadas están bien definidas. Despejamos las intersecciones de la fórmula de la probabilidad condicionada.

$$P(A|H_i) = \frac{P(A\cap H_i)}{P(H_i)};\ P(A\cap H_i) = P(A|H_i)\cdot P(H_i)$$

Además, A se puede escribir como una unión disjunta de sucesos como sigue:

$$A = (A\cap H_1)\cup(A\cap H_2)\cup\ldots(A\cap H_n)$$

Usando las dos últimas igualdades, tenemos la fórmula que buscábamos:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A\cap H_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)\cdot P(H_i)$$

Problema 0.3 Sea una moneda que tiene probabilidad $p, 0 < p < 1$ de sacar cara y $q = 1-p$ de sacar cruz. Se tira la moneda dos veces. Se consideran los sucesos A, B consistentes en sacar cruz en la primera tirada y sacar cara en la segunda tirada, respectivamente.

1. Probad o refutad que A y B son independientes.
2. ¿Son independientes los sucesos A y sacar el mismo resultado en ambas tiradas? Probad o refutad.

3. Si C es el suceso sacar dos cruces, ¿son A y C independientes?

Solución: Para uso a lo largo de todo el problema, empezamos definiendo el espacio muestral. Los resultados de una tirada son C o X. Como hay dos tiradas, el espacio muestral está formado por las sucesiones de longitud dos formadas por C o X:

$$E = \{(X, X), (X, C), (C, X), (C, C)\}$$

Los sucesos A y B son $A = \{(X, X), (X, C)\}$ y $B = \{(X, C), (C, C)\}$.

1. Comprobaremos si ocurre que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. El suceso $A \cap B$ es $\{(X, C)\}$. Tenemos las siguientes probabilidades:

$$P(A) = (1 - p)^2 + p(1 - p),\ P(B) = p(1 - p) + p^2,\ P(A \cap B) = p(1 - p)$$

Calculamos el producto $P(A)P(B)$:

$$\begin{aligned} P(A)P(B) =& ((1 - p)^2 + p(1 - p)) \cdot (p(1 - p) + p^2) \\ =& ((1 - p)(1 - p + p)) \cdot (p(1 - p + p)) = (1 - p) \cdot p \end{aligned}$$

Por tanto, los sucesos son independientes.

2. Llamemos D al suceso sacar el mismo resultado en ambas tiradas. Se tiene que $D = \{(X, X), (C, C)\}$ y su probabilidad es $P(D) = (1 - p)^2 + p^2$. La intersección de A y D es el suceso (X, X) de probabilidad $(1 - p)^2$. Entonces:

$$\begin{aligned} P(A)P(D) =& ((1 - p)^2 + p(1 - p)) \cdot ((1 - p)^2 + p^2) \\ =& (1 - p) \cdot (1 - p + p) \cdot ((1 - p)^2 + p^2) = (1 - p) \cdot ((1 - p)^2 + p^2) \\ =& (1 - p) \cdot (2p^2 - 2p + 1) = 2p^2 - 2p + 1 - 2p^3 + 2p^2 - p \\ =& - 2p^3 + 4p^2 - 3p + 1 \end{aligned}$$

La pregunta es si esta cantidad es distinta de $P(A \cap D) = (1 - p)^2$. Definamos la siguiente función $Q(p) = P(A)P(D) - P(A \cap D)$. Si la simplificamos, tenemos

$$\begin{aligned} Q(p) =& - 2p^3 + 4p^2 - 3p + 1 - (1 - p)^2 = -2p^3 + 4p^2 - 3p + 1 - 1 + 2p - p^2 \\ =& - 2p^3 + 3p^2 - p \end{aligned}$$

La función $Q(p)$ es un polinomio que se puede factorizar como $Q(p) = p \cdot (2p - 1) \cdot (1 - p)$. Las raíces son, pues, $p = 0, 1, 1/2$. Las dos primeras están excluidas por el problema. Solo queda $p = 1/2$. Abajo está la gráfica de la función.

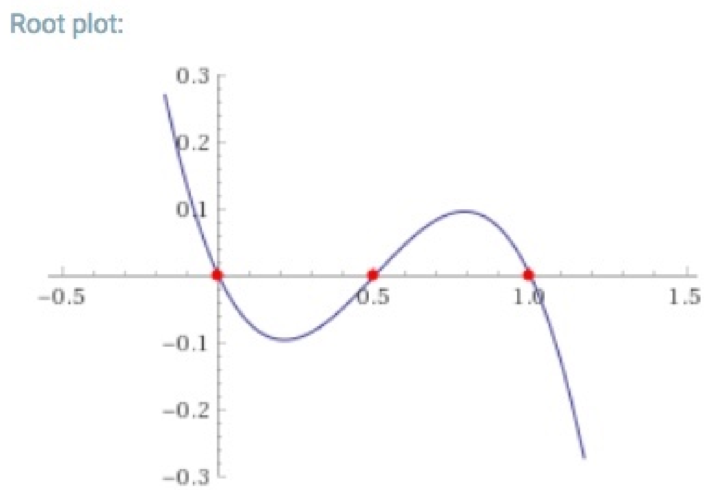

Figura 1: La función $Q(p)$

Por tanto, los sucesos son independientes cuando $p = 1/2$ y no lo son en otro caso.

3. El suceso sacar dos cruces es $C = \{(X, X)\}$ con probabilidad $(1-p)^2$. El producto $P(A)P(C)$ no es igual a $P(A \cap C) = P(C)$, ya que $P(A) < 1$ y, por tanto, no son sucesos independientes.

Teorema 0.4 (Teorema de Bayes) *Sea E un espacio muestral en un espacio de probabilidad y sean hipótesis $H_1,\ H_2, \ldots, H_n$ tales que:*

- *La unión de los sucesos $H_i, i = 1, \ldots, n$ es el espacio muestral;*
- *Los sucesos de H_i, H_j son disjuntos dos a dos.*
- *Se cumple que $P(H_i) > 0$.*

Si A es un suceso, entonces las probabilidades a posteriori $P(H_i|A)$, para $i = 1, \ldots, n$, son

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(A|H_j)}$$

Prueba: Las hipótesis del teorema de Bayes son las mismas que las del teorema de la probabilidad total. Por tanto, podemos escribir la probabilidad del suceso A como

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)$$

Por otro lado, calculamos la probabilidad $P(A \cap H_i)$ usando las dos probabilidades condicionadas $P(A|H_i)$ y $P(H_i|A)$.

$$P(A|H_i) = \frac{P(A \cap H_i)}{P(H_i)}; P(A \cap H_i) = P(A|H_i) \cdot P(H_i);$$

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i \cap A)}{P(A)}; P(A \cap H_i) = P(H_i|A) \cdot P(A);$$

Si igualamos las dos expresiones de $P(A \cap H_i)$ y despejamos $P(H_i|A)$ tenemos:

$$P(A|H_i) \cdot P(H_i) = P(H_i|A) \cdot P(A);\ P(A|H_i)P(H_i) = \frac{P(H_i|A) \cdot P(A)}{P(A)};$$

Sustituyendo $P(A)$ por su expresión arriba, obtenemos la fórmula buscada:

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(A|H_j)}$$

Problema 0.5 (Problema 2.7.2) Un doctor está tratando de averiguar si un paciente tiene una de tres enfermedades, E_1, E_2, E_3. Le hará dos tests al paciente, que o bien dan positivo (+) o negativo (-). Los registros de la enfermedad indican en una muestra de 10.000 personas la distribución y los resultados de los tests son los que aparecen en el cuadro 1

	Personas	Resultados de los tests			
Enfermedad	enfermas	$++$	$+-$	$-+$	$--$
E_1	3215	2110	301	704	100
E_2	2125	396	132	1187	410
E_3	4660	510	3568	73	509

Tabla 1: Datos de las enfermedades

Se pide lo siguiente:

1. Identificad las probabilidades a priori.
2. En vista de los datos, ¿cuál es la enfermedad más probable que el paciente puede tener?
3. Calculad las probabilidades a posteriori e interpretadlas en el contexto del problema.

Solución: El experimento aleatorio consiste en confirmar si un paciente tiene una de las enfermedades bajo estudio. Por tanto, la partición del espacio muestral son las enfermedades E_1, E_2, E_3. Se supone que una persona no puede tener más de una de estas tres enfermedades. Las probabilidades de las enfermedades son:

$$P(E_1) = \frac{3.215}{10.000} = 0.3215;\ P(E_2) = \frac{2.125}{10.000} = 0.2125;\ P(E_3) = \frac{4.660}{10.000} = 0.466;$$

1. Las probabilidades a priori son las probabilidades de los sucesos de los resultados de los tests y estas son, para cada enfermedad $E_i, i = 1, 2, 3$, iguales a

   $$P((+,+)|E_i),\ P((+,-)|E_i),\ P((-,+)|E_i),\ P((-,-)|E_i)$$

   Puestas en forma de tabla, estas probabilidades son:

Enfermedad	Personas enfermas	Probabilidades a priori ++	+−	−+	−−
E_1	3215	$\frac{2110}{3215}=0.6562$	$\frac{301}{3215}=0.0936$	$\frac{704}{3215}=0.2189$	$\frac{100}{3215}=0.0311$
E_2	2125	$\frac{396}{2125}=0.1863$	$\frac{132}{2125}=0.0621$	$\frac{1187}{2125}=0.5585$	$\frac{410}{2125}=0.1929$
E_3	4660	$\frac{510}{4660}=0.1094$	$\frac{3568}{4660}=0.7656$	$\frac{73}{4660}=0.0156$	$\frac{509}{4660}=0.1092$

2. Si aceptamos como que un paciente tiene la enfermedad con alta probabilidad cuando los dos tests dan positivo, entonces basta comparar las probabilidades de la tercera columna de la tabla anterior, esto es, la columna de $(+,+)$.

$$\frac{2110}{3215}=0.6562;\ \frac{396}{2125}=0.1836;\ \frac{510}{4660}=0.1094$$

La enfermedad más probable es la uno.

Esta es una de las interpretaciones posibles, la de que la enfermedad se detecta con dos positivos en los tests, pero es posible interpretar que la enfermedad se confirma en cuanto hay un positivo. En ese caso habría que buscar el máximo en las columnas correspondientes a $(+,+)$, $(+,-)$ y $(-,+)$. El máximo se alcanza para el test $(+,-)$ en la enfermedad tres, $P((+,-)|E_3)=0.7656$.

3. Las probabilidades a posteriori son, para $i=1,2,3$,

$$P(E_i|(+,+)),\ P(E_i|(+,-)),\ P(E_i|(-,+)),\ P(E_i|(-,-))$$

Estos números son las probabilidades de una enfermedad sabiendo que ha salido determinado resultado en un test. Por ejemplo, la probabilidad de tener la enfermedad 1 sabiendo que ha dado $(+,+)$ el test es:

$$P(E_1|(+,+))=\frac{P((+,+)|E_1)P(E_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(E_i)P((+,+)|E_1)}$$

$$=\frac{\frac{2110}{3215}\cdot\frac{3215}{10.000}}{\frac{2110}{3215}\cdot\frac{3215}{10000}+\frac{396}{2125}\cdot\frac{2125}{10000}+\frac{510}{4660}\cdot\frac{4660}{10000}}=\frac{0.211}{0.3016}=0.6996$$

El resto de las probabilidades a posteriori son análogas.

Las probabilidades a posteriori $P(E_i|(+,+)$ nos proporcionan en este caso la probabilidad de que un paciente tenga una enfermedad sabiendo que los resultados de los tests son los dos positivos.