3.2.2 Variables aleatorias continuas

El lector se podría estar preguntando en este momento por qué es necesaria la distinción entre variables discretas y continuas. La razón es técnica y a la vez profunda. Para decirlo con contundencia y presteza, la razón es que todos los infinitos no son iguales. Cuando consideramos una variable discreta, esta puede tomar valores en un conjunto finito o infinito del tipo de $\mathbb{N}$ (llamado **infinito numerable**). Con este tipo de conjuntos se pueden sumar probabilidades del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$, es decir, por series. Sin embargo, si la variable toma valores en un intervalo, entonces resulta que el infinito del intervalo es más grande que el infinito numerable[3]. Ello hace que no sea posible tomar los sumatorios como en el caso discreto; hay que acudir a otro mecanismo matemático más general: las integrales. Los sumatorios del mundo discreto serán las integrales en el mundo continuo y lo que eran funciones de masa definidas sobre puntos aislados de un espacio discreto ahora serán funciones definidas en $\mathbb{R}$ o en algún intervalo suyo.

La introducción de las variables continuas en la probabilidad permitió resolver muchos problemas prácticos, sobre todo ciertos problemas geométricos. Posteriormente, se encontraron aplicaciones en multitud de contextos, incluida la informática. En informática gráfica, los métodos de Monte Carlo y la generación de números aleatorios son dos de los campos de más frecuente e intensa aplicación.

Una variable aleatoria continua X se caracteriza por su **función de densidad** $f(x)$. Damos en este momento su definición formal. A partir de ahora cuando hablemos de intervalos incluirá el propio $\mathbb{R}$, considerando a este como el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Definición 3.2.13 Sea un espacio de probabilidad (E, Ω, P), donde E es un intervalo (a, b). Dada la variable aleatoria continua X, su función de densidad es una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumple las dos propiedades siguientes:

(1) $f(x) \geq 0$ en (a, b) y $f(x) = 0$ fuera de él;

(2) la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ vale 1.

La función de densidad no tiene por qué tener una definición cerrada en términos de una sola fórmula; con frecuencia, es una función a trozos.

Pongamos un ejemplo sencillo para ilustrar esta definición. consideremos la función $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

¿Es una función de densidad? Enseguida se ve que la primera condición se cumple, pues la función $2x$ es mayor o igual que 0 en el intervalo $[0, 1]$. Para la segunda condición, tenemos:

$$\int_0^1 2xdx = \left[x^2\right]_0^1 = 1 - 0 = 1$$

Por tanto, se cumple la segunda condición y la función sí es de densidad.

Lo que el lector se preguntará —con lógica impaciencia— es cómo se calcula la probabilidad de un cierto intervalo. En el caso de las variables discretas, la función de masa nos servía para

[3]Para el lector interesado, existe toda una jerarquía de infinitos. Es algo que se conoce desde finales del siglo XIX gracias a Cantor y otros matemáticos. El infinito más pequeño es el de $\mathbb{N}$ y se designa por $\aleph_0$. El siguiente es el de los números reales y sus intervalos y se designa por $\aleph_1$. Se sabe que $\aleph_0 < \aleph_1$.

ello; bastaba con sumar las probabilidades asociadas al suceso en cuestión. En el caso continuo la probabilidad de un intervalo (a, b) es la *suma infinita* de la integral de la función densidad. **La probabilidad de un intervalo** se define como sigue.

Definición 3.2.14 Variable aleatoria continua. Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$, la probabilidad de un intervalo $(a, b]$ es

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Más adelante se justificará esta definición, en particular por qué el primer menor del intervalo es estricto y el segundo no.

Problema 3.2.15 Dado que las funciones de densidad están relacionadas con las integrales por vía de la definición anterior, interpretad la conexión entre variable aleatoria continua, probabilidad e integral.

Ejercicio 3.2.16 Dada una variable aleatoria continua X con función de densidad $f(x)$, probad lo siguiente:

(a) La probabilidad de un punto es 0;

(b) $P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b)$.

Problema 3.2.17 La definición de probabilidad de intervalo, ¿es compatible con los axiomas de la probabilidad y con el resto de conceptos del capítulo 2? Comprobad que es así.

Problema 3.2.18 La longitud de ciertas piezas, en cm, es una variable aleatoria X con densidad

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{si } 0 < x < 2 \\ k(4-x) & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Hallad:

(a) El valor de k para que f sea función de densidad. Representadla.

(b) La probabilidad de que una pieza, tomada al azar, mida entre 1 y 3 cm, sabiendo que mide más de 2 cm.

3.3 Momentos de variables aleatorias

Las variables aleatorias pueden presentar muchas formas, tanto en los valores que toman como en su distribución de probabilidades. Para caracterizarlas se suelen asociar unos números que nos indican el comportamiento de la variable aleatoria. Dichos números reciben el nombre general de **momentos** de la variable aleatoria. Esos números se dividen en tres grandes