Probabilidad

- ¿Por qué?
  - Razonamiento en presencia de la incertidumbre
  - Aplicaciones
- Conceptos básicos
  - Experimento aleatorio
  - Espacio muestral
    - Sucesos elementales
    - Sucesos disjuntos
    - Suceso imposible y suceso seguro
  - Espacio de sucesos
    - Sucesos compuestos
    - Caso discreto: las partes de E
    - Caso continuo
  - Definición axiomática de probabilidad

    Axioma 1: Para todo suceso $A \subseteq E$, se tiene que $P(A) \geq 0$.

    Axioma 2: $P(E) = 1$.

    Axioma 3: Sea $\{A_i \mid i \in I\}$ un conjunto de sucesos disjuntos, esto es, tales que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Entonces se tiene que:

    $$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i)$$

    - Propiedades de la probabilidad
      - **Teorema 2.4.13** *Sea (E, Ω, P) un espacio de probabilidad.*

        (1) Si A, B son dos sucesos cualesquiera y $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$.

        (2) La probabilidad es un número entre 0 y 1.

        (3) Para todo $A \in \mathcal{P}$, se tiene que $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

        (4) Si A, B son dos sucesos cualesquiera, entonces

        $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
      - Regla de Laplace: espacios muestrales finitos y equiprobables
        - $$P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(\{a_{i_j}\}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n} = \frac{|A|}{|E|}$$
        - Reduce el cálculo de probabilidades a la combinatoria
          - Combinatoria: recuento de objetos
            - Principios básicos
              - Principio de la suma
              - Principio del producto
              - Principio de inclusión-exclusión
            - Permutaciones: recuento de listas
            - Variaciones: recuento de sublistas
            - Combinaciones: recuento de subconjuntos
- Probabilidad condicionada
  - Incorporación de conocimiento previo a la probabilidad
  - Si P(B)>0:

    $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
  - Teorema de la probabilidad total

    Teorema 2.6.3 Teorema de la probabilidad total. *Sea E un espacio muestral. Supongamos que existen un conjunto de sucesos $H_1, H_2, \ldots, H_n$ tales que:*

    - *La unión de los sucesos $H_i, i = 1, \ldots, n$ es el espacio muestral;*
    - *Los sucesos de H_i, H_j son disjuntos dos a dos*
    - *Se cumple que $P(H_i) > 0$.*

    Entonces se tiene que, para cualquier suceso A:

    $$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A|H_i)$$
- Sucesos independientes
  - Definición de independencia
    - Un suceso no influye en la probabilidad de otro: P(A|B)=P(A)
      - Condición necesaria y suficiente:

        $$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$
    - Sucesos mutuamente independientes
      - $$P(A_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_m) = P(A_i)P(A_j)\ldots P(A_m)$$
- Teorema de Bayes
  - Causas disjuntas y resultados en un experimento aleatorio
  - $$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(A|H_j)}$$